Министерство образования и науки Луганской Народной Республики

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Луганской Народной Республики

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко

ОП «Луганский профессиональный торгово - кулинарный колледж»

МАТЕМАТИКА

**Научно-исследовательская работа на тему:**

**Решение уравнений с параметрами**

Работу выполнила:

Коровкина Марина

обучающаяся 84 группы

ОП «ЛПТКК ЛНУ им. Тараса Шевченко»

Научный руководитель:

Зверяка Светлана Усманбаевна,

преподаватель математики ОП

«Луганский профессиональный торгово-кулинарный колледж ЛНУ имени Тараса Шевченко»,

специалист І категории

**Луганск - 2019**

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc416117797)

[РАЗДЕЛ 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР 6](#_Toc416117798)

[РАЗДЕЛ 2 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ,](#_Toc416117799)

[СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР 8](#_Toc416117800)

[2.1. История возникновения уравнений с параметром 8](#_Toc416117801)

[2.2. Теорема Виета 10](#_Toc416117802)

[2.3. Аналитический метод решения задач с параметрами. 11](#_Toc416117803)

[2.3.1. Линейные уравнения с параметрами 11](#_Toc416117804)

[2.3.2. Квадратные уравнения, содержащие параметр 13](#_Toc416117805)

[2.3.3. Рациональные уравнения, содержащие параметр,](#_Toc416117806)[сводящиеся](#_Toc416117807)

[к линейным 18](#_Toc416117807)

[2.3.4. Иррациональные уравнения, содержащие параметр 19](#_Toc416117808)

[2.4. Графически метод решения задач с параметрами. 21](#_Toc416117809)

[ВЫВОДЫ 25](#_Toc416117810)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 27](#_Toc416117811)

[ПРИЛОЖЕНИЯ 29](#_Toc416117812)

# ВВЕДЕНИЕ

**«Метод решения хорош,**

**если с самого начала мы можем предвидеть –**

**и далее подтвердить это, - что,**

**следуя этому методу, мы достигнем цели.»**

**Г. Лейбниц**

В повседневной жизни мы очень часто сталкиваемся с понятием параметра: параметр загрузки в Windows 10, параметры бытовых приборов, параметры автомобиля. Покупая какую-то вещь, мы внимательно изучаем ее основные характеристики. Так, приобретая компьютер, мы обращаем внимание на следующие его параметры: производительность, габариты, состав комплектующих, цену и др… Исследование многих жизненных процессов осуществляется с помощью параметров. Например, состояние больного определяется с помощью параметров температуры, давления. Для оценки состояния спортсмена в качестве параметра используется частота сердечных сокращений. Положение движущегося тела в пространстве определяется параметром времени. В изолированном сосуде данного объема давление газа характеризуется параметром температуры.

Толковый словарь определяет параметр как величину, характеризующую какое-нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса. (Ожегов С.И. , Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка. Москва. 1999). Рассмотрение параметров - это всегда выбор. Перед выбором мы стоим и в различных жизненных ситуациях.

Вспомним сказку. В чистом поле стоит столб, а настолбу написаны слова: «Кто поедет от столба сего прямо, тот будет голоден и холоден; кто поедет в правую сторону, тот будет здрав и жив, а конь его будет мертв; а кто поедет в левую сторону, тот сам будет убит, а конь его жив и здрав останется!» Иван-царевич прочел эту надпись и поехал в правую сторону, держа на уме: хоть конь его и убит будет, зато сам жив останется и со временем сможет достать себе другого коня. (“Иван-царевич и серый волк” Русская народная сказка).

Но это в сказке, а что же собой представляет параметр в математике? Какую роль он играет при решении уравнений? Какими методами решаются уравнения с параметрами?

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать такие уравнения с параметрами при сдаче государственной итоговой аттестации и на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения.

Цель данной работы систематизировать уравнения, содержащие параметр, и составить алгоритм их решения с учетом свойств различных функций.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) дать определения понятиям «уравнение с параметрами»;

2) показать принцип решения данных уравнений на общих случаях;

3) показать решение уравнений с параметрами, связанных со свойствами линейной, квадратичной, рациональной и иррациональной функциями, используя различные методы.

4) составить алгоритм решения уравнений с параметрами, с учетом свойств различных функций.

Для выполнения поставленной цели были использованы следующие методы: изучение и анализ литературы разного типа, работа в группах на уроках алгебры и факультативных занятиях по математике, апробация полученных результатов на уроках математики.

Объектом исследовательской работы было решение уравнений с параметрами, связанных со свойствами выше представленных функций.

Мы выбрали эту тему, так как она является неотъемлемой частью изучения школьного курса алгебры. Готовя данную работу, была ставлена цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. Данная работа поможет понять другим ученикам, как решаются уравнения с параметрами, применяя аналитический и графического методы, узнать о происхождении таких уравнений. В работе приводятся теоретические основы решения уравнений, содержащих параметр. Рассмотривается аналитический и графический способы решения основных видов уравнений, содержащих параметр.

В работе рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений, и, надеемся, что знания, полученные нами в процессе работы, помогут при сдаче школьных экзаменов, ведь уравнения с параметрами по праву считаются одними из самых сложных задач в курсе школьной математики. Именно такие задачи и попадают в список заданий на ГИА. В первой части изложен наиболее стандартный, аналитический способ решения уравнений, а во второй – графический.

Задачи с параметрами представляют чисто математический интерес, способствуют интеллектуальному развитию учащихся, служат хорошим материалом для отработки навыков. Они обладают диагностической ценностью, так как с помощью них можно проверить знание основных разделов математики, уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности и перспективные возможности успешного овладения курса математики в высших учебных заведениях.

**РАЗДЕЛ 1**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР**

Пусть дано равенство с переменными ***x, a***:

Если ставится задача для каждого действительного значения***а*** решить это уравнение относительно ***х***, то уравнение называется уравнением с переменной ***х*** и параметром ***а***.

Решить уравнение с параметром ***а*** – это значит для каждого значения ***а*** найти значения ***х***, удовлетворяющие этому уравнению.

Рассмотрим уравнение

**(*F*)

с неизвестными *х, у, ..., z* и с параметрами **. При всякой допустимой системе значений параметров *α*0, *β*0, ..., *γ*0 уравнение (*F*) обращается в уравнение

**(*F0*)

с неизвестными *х, у,...,* z, не содержащих параметров. Уравнение (*F0*) имеет некоторое вполне определенное множество (быть, может, пустое) решений.

Аналогично рассматриваются неравенства и системы, содержащие параметры. Допустимыми системами значений параметров считаются системы, допустимые для каждого уравнения в отдельности.

***Определение.*** *Решить уравнение, содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения.*

Понятие эквивалентности применительно к уравнениям, содержащие параметр, устанавливается следующим образом.

***Определение.*** *Два уравнения*

*F(х, у, ..., z; ) =*0 (*F*),

*Ф (х, у, ..., z; )=*0 (*Ф*)

с неизвестным х, у,..., z и с параметрами называются эквивалентными, если для обоих уравнениймножество допустимых систем значений параметров одно и то же и при всякой допустимой системе значений, параметров оба уравнения эквивалентны.

Итак, *эквивалентные уравнения при всякой допустимой системе значений параметров имеют одно и то же множество решений.*

Преобразование уравнения, изменяющее множество допустимых систем значений параметров, приводит к уравнению, не эквивалентному данному уравнению.

Предположим, что каждое из неизвестных, содержащихся в уравнении

*F*(*x, у, z; *)=0 (*F*)

задано в виде некоторой функции от параметров:

*х* = *х*(**);

*у* = *у*(**);

*z* = *z*(**). (Х)

Говорят, что система функций (*Х*), заданных совместно, удовлетворяет уравнению (*F*), если при подстановке этих функций вместо неизвестных *х*, *у*,..., *z* в уравнение (*F*) левая его часть обращается в нуль тождественно при всех допустимых значениях параметров:

*F*(*x*(**),*y*(**),…,*z*(**))≡0.

При всякой допустимой системе численных значений параметров *= α0*,**, ...,**соответствующие значения функций (*Х*) образуют решение уравнения[1], [18].

РАЗДЕЛ 2

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ,

СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

Основной принцип решения параметрических уравнений можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра в каждом из них получающиеся уравнения можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра, используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений с постоянными коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться с тем, чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения.

Для разбиения множества значений параметра на участки удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра будем называть контрольными.

Основное, что нужно усвоить при решении таких уравнений. Параметр – это буква, которая «никому ничем не обязана» и может принимать любые допустимые значения. Поэтому с ней нужно необходимость осторожно, даже деликатно, помня, что это фиксированное, но неизвестным числом.

## 2.1. История возникновения уравнений с параметром

Задачи на уравнения с параметром встречались уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

В уравнении коэффициенты, кроме параметра *a*, могут быть и отрицательными.

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений с параметром а. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корням», т. е.

2) «Квадраты равны числу», т. е.

3) «Корни равны числу», т. е

4) «Квадраты и числа равны корням», т. е.

5) «Квадраты и корни равны числу», т. е.

6) «Корни и числа равны квадратам», т. е.

Формулы решения квадратных уравнений по Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Вывод формулы решения квадратного уравнения с параметром в общем виде имеется у Виета, однако Виета признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в ХII в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

История возникновения графического метода далеко уходит в древние века. Исследование общих зависимостей началось в 14 веке. Средневековая наука была схоластической. При таком характере не оставалось места изучению количественных зависимостей, речь шла лишь о качествах предметов и их связях друг с другом.

Французский ученый Николай Оресм стал изображать интенсивность длинами отрезков. Когда он располагал эти отрезки перпендикулярно некоторой прямой, их концы образовывали линию, названную им "линией интенсивностей" или "линией верхнего края» (график соответствующей функциональной зависимости). Оресм изучал даже "плоскостные" и "телесные" качества, т.е. функции, зависящие от двух или трех переменных.

Важным достижением Оресма была попытка классифицировать получившиеся графики. Он выделил три типа качеств: Равномерные (с постоянной интенсивностью), равномерно-неравномерные (с постоянной скоростью изменения интенсивности) и неравномерно-неравномерные (все остальные), а также характерные свойства графиков таких качеств.

Чтобы создать математический аппарат для изучения графиков функций, понадобилось понятие переменной величины. Это понятие было введено в науку французским философом и математиком Рене Декартом (1596-1650). Именно Декарт пришел к идеям о единстве алгебры и геометрии и о роли переменных величин, Декарт ввел фиксированный единичный отрезок и стал рассматривать отношения других отрезков к нему.

Таким образом, графики функций за все время своего существования прошли через ряд фундаментальных преобразований, приведших их к тому виду, к которому мы привыкли. Каждый этап или ступень развития графиков функций - неотъемлемая часть истории современной алгебры и геометрии.

Графический способ определения числа корней уравнения в зависимости от входящего в него параметра является более удобным, чем аналитический.

## 2.2. Теорема Виета

Теорема, выражающая связь между параметрами, коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если *b + d*, умноженное на α минус α2, равно *bc*, то α равно *b* и равно *d*».

Чтобы понять Виета, следует вспомнить, что α, как и всякая гласная буква, означала у него неизвестное (наше *х*), гласные же *b, d* – коэффициенты при неизвестном. На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если имеет место

*(α + b)x – x2 = αb,*

Т. е*. x2 - (α –b)x + αb =0,*

то *x1 = α, x2 = b*.

Выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений общими формулами, записанными с помощью символов, Виета установил единообразие в приемах решения уравнений. Однако символика Виета еще далека от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел и поэтому при решении уравнений рассматривал лишь случаи, когда все корни положительны.

## 2.3. Аналитический метод решения задач с параметрами.

### 2.3.1. Линейные уравнения с параметрами

Уравнение вида , где – некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Если , то линейное уравнение имеет единственный корень: .

Если , переписав исходное уравнение в виде , легко видеть, что любое *х* является решением линейного уравнения.

Если а, то линейное уравнение не имеет корней.

Класс линейных уравнений с параметром выделяется с помощью двух характеристик:

1. В уравнении переменная *х* находится в первой степени;

2. При помощи равносильных преобразований на области допустимых значений параметра уравнение приводится к стандартному виду

Основываясь на основные свойства линейной функции, можно составить алгоритм решения. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты его могут быть опущены (Приложение 1).

Пример 1.

Решить уравнение: , если *а*– параметр.

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.

2. Приведем уравнение к виду.

3. Контрольными являются те значения параметра, при которых коэффициент при *х* обращается в нуль. Такими значениями будут.

4. Если , то уравнение примет вид . Это уравнение не имеет корней.

Если , то уравнение примет вид . Корнем этого уравнения является любое действительное число.

5. Если , то , .

Ответ: если , то корней нет;

если , то ;

если , то .

Пример 2.

Решить уравнение: , если *а*– параметр.

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.

2. Приведем уравнение к виду .

3. Контрольные значения параметра: .

4. Если , то уравнение примет вид . Это уравнение не имеет корней.

Если , то уравнение примет вид. Корнем этого уравнения является любое действительное число.

5. Если , то .

Ответ: если , то корней нет;

если , то ;

если , то .

Пример 3.

Решить уравнение:

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.
2. Приведем уравнение к виду
3. Контрольные значения параметра: .
4. если , то уравнение принимает вид , x
5. если , то уравнение имеет один корень

,

Ответ: если , то

если , то

### 2.3.2. Квадратные уравнения, содержащие параметр

Класс уравнений второй степени с параметрами определяется с помощью двух характеристик:

1. Переменная *х* в уравнении находится в первой и второй степенях;

2. При помощи равносильных преобразований на области допустимых значений параметра уравнение приводится к стандартному виду

.

Контрольные значения параметра определяются дискриминантом *D*. На выделенных контрольными значениями промежутках допустимых значений параметра дискриминант имеет определенный знак, соответствующие частные уравнения принадлежат одному из типов:

1. Если , то уравнение имеет два корня:
2. Если , то уравнение имеет один корень кратности два или два равных корня
3. Если , то уравнение не имеет действительных корней.

Тогда решением всякого уравнения с параметром не выше второй степени осуществляется по следующим этапам:

1. На числовой прямой отмечаются все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.
2. На области допустимых значений параметра исходного уравнения при помощи равносильных преобразований приводится к виду .
3. Выделяют множество контрольных значений параметра, для которых .

Если уравнение  имеет конечное множество решений, то для каждого найденного контрольного значения параметра соответствующее частное уравнение решается отдельно. Проводится классификация частных уравнений по первым трем типам.

На бесконечном множестве решений уравнения  проводится решение уравнения , выделяются типы бесконечных и пустых особых частных уравнений. Множеству значений параметра, для которых  и , соответствует третий тип не особых частных уравнений.

1. Выделяются контрольные значения параметра, для которых дискриминант обращается в нуль. Соответствующие не особые частные уравнения имеют двукратный корень .
2. Найденные контрольные значения параметра разбивают область допустимых значений параметра на промежутки. На каждом из промежутков определяется знак дискриминанта.

Множеству значений параметра, для которых  и, соответствует тип не особых частных уравнений, не имеющих решений, для значений параметра из множества, где  и , частные уравнения имеют два различных действительных корня [1],[5],[19].

Из этого следует алгоритм решения квадратных уравнений с параметрами. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты его могут быть опущены (Приложение 2)

Пример4.

Решить уравнение: .

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.
2. Контрольным значением параметра является .

при уравнение будет линейное

при уравнение будет квадратным

1. Если , то уравнение примет вид . Отсюда .
2. При уравнение является квадратным. Найдем дискриминант уравнения:

.

1. Контрольное значение параметра
2. Если .
3. Оценим знак дискриминанта

+ +

- 0,8 1

1. Если и действительных корней нет.

Если .

Ответ:

, то корней нет;

;

.

Пример 5.

Решить уравнение

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.
2. Контрольное значение параметра .
3. Если , то уравнение будет линейным и примет вид
4. Если , то уравнение будет квадратным с дискриминантом
5. Контрольное значение параметра .
6. Если
7. Оценим знак дискриминанта

+ + +

0 1

1. Если

Ответ: если ;

если ;

если.

Пример 6.

Решить уравнение:

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.
2. Контрольное значение параметра.
3. Если , то уравнение будет линейным и примет вид
4. Если , то получим квадратное уравнение с дискриминантом
5. Контрольные значения параметра
6. Если получаем ,

если

1. Оценим знак дискриминанта

– + + –

1 2 6

1. Если 1< а < 2 и 2< а < 6 , то дискриминант положителен и уравнение имеет два корня
2. Если уравнение корней не имеет.

Ответ: если , то корней нет;

если

если

если ;

если

если ;

если, то корней нет.

Пример 7.

Сколько корней может иметь при различных значениях параметра *b* уравнение ?

1. Область допустимых значений параметра – вся числовая прямая.
2. Приведем уравнение к виду .
3. Контрольное значение параметра: .
4. Если и уравнение имеет один корень.
5. Оценим знак дискриминанта

+ –

0,25

1. Если и уравнение не имеет корней.

Если и уравнение имеет два различных корня.

Ответ: уравнение имеет два различных корня, при - один корень, при уравнение не имеет корней.

Обобщив простейшие случаи соотношения между двумя корнями квадратного уравнения, образуем математические модели (Приложение 3).

### 2.3.3. Рациональные уравнения, содержащие параметр,

### сводящиеся к линейным

Процесс решения рациональных уравнений протекает по обычной схеме. Данное уравнение заменяется целым, путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего решают известным способом целое уравнение, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают общий знаменатель в нуль. В случае уравнений с параметрами эта задача более сложная. Здесь, чтобы посторонние корни исключить, требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решать соответствующие уравнения относительно параметра [1].

Пример 8.

Решить уравнение: .

1. Область допустимых значений:
2. Контрольное значение параметра
3. При , уравнение не имеет корней.
4. Если,то:*.*
5. Найдем дискриминант уравнения.
6. Находим корни уравнения:*.*
7. При приведении к общему знаменателю, расширилась область определения уравнения, что могло привести к появлению посторонних корней. Поэтому необходима проверка.

*Проверка*. Исключим из найденных значений *х*такие, при которых

.

Если

Таким образом, при посторонний корень уравнения.

Если

Таким образом, при **-**посторонний корень уравнения.

Если *.*

Таким образом, при посторонний корень уравнения.

Если .

Таким образом, при **-**посторонний корень уравнения.

При получаем;

При

.

*Ответ*:

### 2.3.4. Иррациональные уравнения, содержащие параметр

Главными особенностями при решении уравнений такого типа являются:

1. ограничение области определения неизвестной *х*, так как она меняется в зависимости от значения параметра.
2. в решении уравнений вида  при возведении в квадрат необходимо учитывать знак  и проводить проверку корней.

При рассмотрении всех особых случаев и возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат мы переходим к решению квадратного уравнения с параметром.

Рассмотрим несколько примеров и попробуем заметить эти особенности при решении [1].

Пример 9.

Решить уравнение:.

1. Перепишем исходное уравнение в виде:
2. Возведем в квадрат обе части иррационального уравнения с последующей проверкой полученных решений.

3.Контрольное значение параметра Особое значение: *а* = 0,5.

Отсюда:

1. при
2. при ;
3. при уравнение не имеет решений.

*Проверка*:

1. при подстановке в уравнение, равносильное исходному, получим неверное равенство. Значит, не является решением уравнения.
2. при подстановке в получим:

Так как левая часть равенства отрицательна, то  *х*2 не удовлетворяет исходному уравнению.

1. Подставим в уравнение:

Проведя равносильные преобразования, получим:

Если , то можно возвести полученное равенство в квадрат:

.

Имеем истинное равенство при условии, что .

Это условие выполняется, если . Так как равенство истинно при может быть корнем уравнения при *а* > 0,5, следовательно, *х*1– корень уравнения при *а*≥1.

*Ответ*.

1. при *а* ≥ 1 *х* = 0,5∙(1 + );
2. при*а*<1 уравнение не имеет решений.

## 2.4. Графически метод решения задач с параметрами.

График функции — понятие, которое даёт представление о геометрическом образе функции, т. е. это геометрическое место точек плоскости, абсциссы *(x)* и ординаты *(y)* которых связаны указанной функцией:точка *(x,y)* располагается (или находится) на графике функции *f* тогда и только тогда, когда *y=f(x).*

Таким образом, функция может быть адекватно описана своим графиком.

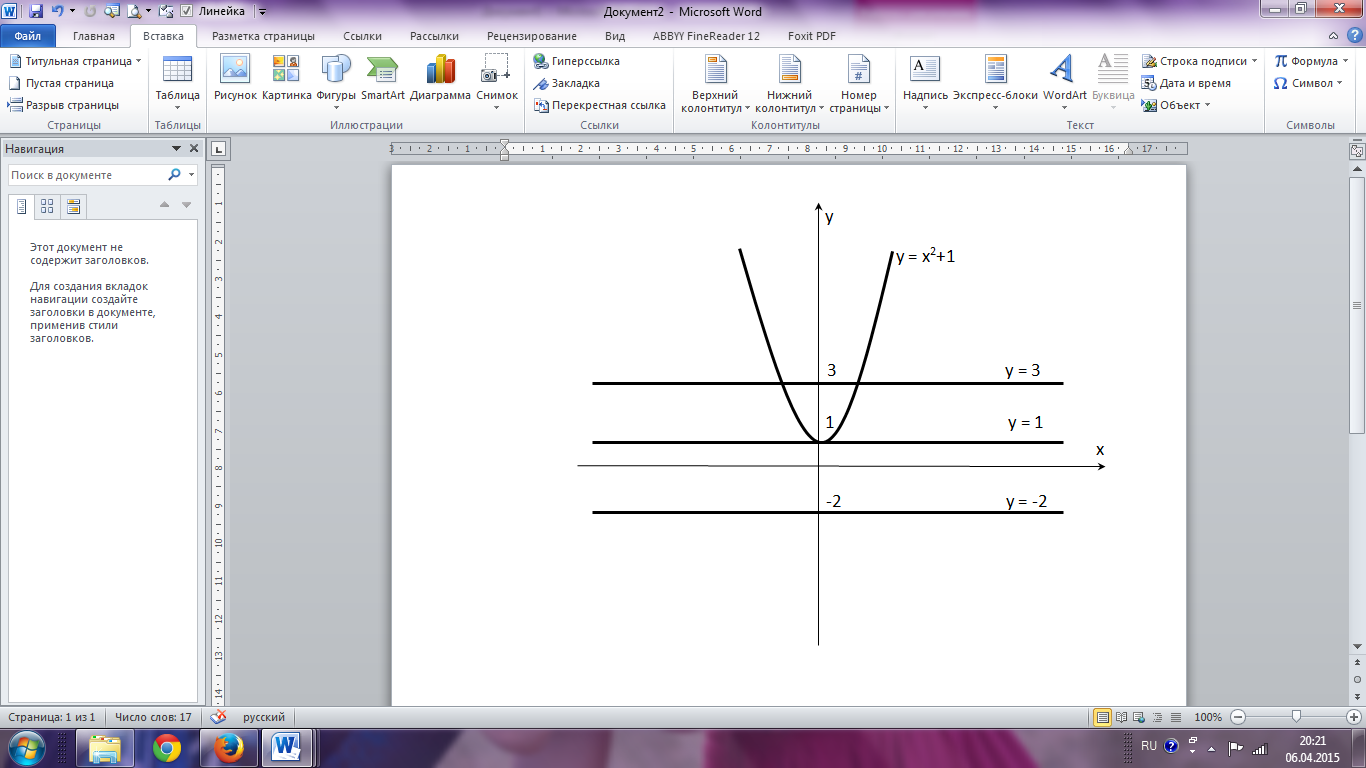
Графический метод решение уравнений с параметром на первый взгляд очень прост. Необходимо построить график данной функции, рассечь его прямыми найти точки пересечения и выписать ответ. Однако, он имеет ряд особенностей, основанных на нахождении всех точек данной плоскости, координаты которых удовлетворяют заданному в условии соотношению. При этом используются различные системы координат: *(хОу), (хОа), (аОх)*. Их выбор обусловлен особенностями уравнения и простотой построения графиков.

При графическом решении уравнения с параметром необходимо:

1. Найти область определения уравнения, т.е. область допустимых значений неизвестного и параметра, при которых уравнение может иметь решения.
2. Выразить параметр как функцию от *x*: 
3. В системе координат (*хОу*) построить графики функций  и  для тех значений *х*, которые входят в область определения уравнения.
4. Определить точки пересечения прямой  с графиком функции .

Возможны ситуации:

1. Прямая  не пересекает график . Следовательно, при данном значении а исходное уравнение решений не имеет.
2. Прямая  пересекает график  в одной или нескольких точках. Следовательно, при данном значении а можно сделать вывод о числе решений исходного уравнения, найти абсциссы точек пересечения и т.д.

Пример 10.

Решить уравнение:

Решением данного уравнения будут точки пересечения графиков *(Парабола у = х2, смещенная вверх на одну единицу)* и *(Прямая, параллельная оси Ох)*

В зависимости от параметра *а*, уравнение имеет несколько решений:

если *а < 0,* прямая *у = а* не пересекает график *у = х2 + 1;*

если*0 ≤ а < 1 прямая у = а* не пересекает параболу;если *а = 1* парабола и прямая имеют единственную точку пересечения;   
при *а > 1* таких точек пересечения две.

Ответ: *а < 1* – корней нет,

*а = 1* – единственный корень,

*а > 1* – два корня.

Пример 11.

Найти все значения *а*, при каждом из которых уравнение  имеет восемь различных решений.

Решение: 1 способ. , 

Построим графики функций при и .

Графиком первой функции является семейство парабол с вершинами, расположенных на оси *Оу*: у=0, и т.д. (в зависимости от *k=0,1,2,3,4,…).*

7 решений

9 решений

у = а2 8 решений

64π2

36π2

16π2

4π2

0

х

у

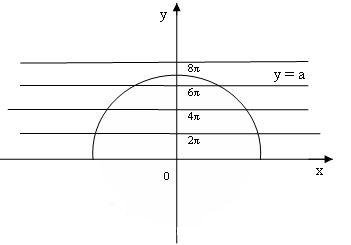
Графиком второй функции является прямая, параллельная оси*Ох*.

По графику определяем, что восемь решений (точек пересечения) возможно в том случае, если прямая  расположена выше прямойно ниже прямой . Следовательно, , .

При ,

при .

Ответ: , 

 Решение: 2 способ.  , Заметим, что параметр а может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но не равен нулю.

Построим график функции  при у>0 , т.е.  или (полуокружность с центром в начале координат) . Графиком второй функции  при является семейство прямых, параллельных оси*Ох*, проходящих через точки с ординатами у=0, , , ,  и т.д.

Рассмотрим полуокружность радиуса *r=a*. Если радиус , то полуокружность пересекает серию прямых в восьми точках. Аналогично рассуждаем для случая*а<0*.

Ответ: , 

Пример 12.

Найти число решений уравнения .

Решение: Заметим, что х не равно нулю. Умножим обе части уравнения на. Получим 

Построим график функции .



Графиком функции  является прямая, параллельная оси*Ох*.

у

х

0

1 решение

1 решение

3 решения

2 решения

1 решение

Анализируя графическую иллюстрацию, понятно, что при а=0 одно решение, т.к. одна точка пересечения (не забываем, что х не равен нулю). При а=1 две точки пересечения графика функции и прямой, а значит и два решения. При а<0 получается одна точка пересечения, как и при а>1. Если же , то график функции и прямая имеют три точки пересечения.

Ответ: при,  одно решение,

при два решения, при  три решения.

Таким образом, графический метод обладает целым рядом преимуществ перед аналитическим: он более нагляден и понятен в случаях, когда необходимо ответить на качественный вопрос или провести анализ множества решений. Однако следует помнить, что универсальных методов и приёмов, пригодных для любой математической задачи, не существует. Поэтому, приступая к анализу того или иного уравнения, необходимо выбрать наиболее эффективный из возможных способов его решения.

# ВЫВОДЫ

Изучив данную тему, можем сделать вывод. Параметр – это буква, которая «никому ничем не обязана» и может принимать любые допустимые значения. Структура решений уравнения зависит от значений параметра; те или иные аспекты этой зависимости и предстоит выяснять в каждой конкретной задаче. Для этого нужно использовать различные формы и методы решения, с учетом свойств каждой конкретной функции.

Как известно, очень узкий класс уравнений решаются по формулам. Это линейные, квадратные, кубические уравнения. Для решения других уравнений используется метод замены переменной или метод разложения на множители. Данные методы позволяют рационально решать сложные уравнения, а порой являются и единственными способами. Для того, чтобы овладеть этими методами, необходимо иметь прочные навыки по стандартным методам, преобразованиям, знать много теоретического материала и дополнительно решать.

Исследовав данную тему, мы пришли к выводу, что нет определённой структуры при решении уравнений с параметрами. Формы и методы решения определяются для каждого задания индивидуально, анализируя конкретную функцию и ее свойства. Поэтому ход решения определяется видом функции, линейной или квадратичной. Рациональные и иррациональные уравнения, путем математических преобразований, сводятся к решению линейных или квадратных. Только в иррациональных не следует забывать о посторонних корнях, обязательно делается проверка.

Графический метод очень удобен, когда выведение параметра, приводит определенной функцию, т.е. явно выражена a=const.

Выведенные алгоритмы решения уравнений были опробованы на уроках математики и факультативных занятиях. Их применение существенно сократило время, затраченное на решения.

Используя алгоритмы решения, представленный в данной работе, на уроках математики и при самостоятельной подготовке к сдаче государственную итоговую аттестацию и ГИА, учащиеся смогут быстро находить рациональные решения уравнений с параметрами.

Работа над данной темой была интересной и познавательной. Изучив методы решения уравнений с параметрами, мы обогатили свой опыт:

• новыми научными понятиями;

• узнали методы, которые выходят за рамки школьной программы;

• углубили и расширили свои знания.

Работа над проектом позволила приобрести опыт выполнения научной работы.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горнштейн, П.И. Задачи с параметрами: учеб.пособие/ П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир – Киев, 1992.
2. Дорофеев, Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. – Львов: Квантор, 1991.
3. Здоровенко, М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами: рациональные уравнения и неравенства./ М.Ю. Здоровенко, В.М. Караулов – Киров, 1999.
4. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986.
5. Горбачев, В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени / В.И. Горбачев// Математика в школе – 2000. - №2. – С. 61-68.
6. Джиоев, Н.Д. Нахождение графическим способом числа решений уравнений с параметром / Н.Д. Джиоев // Математика в школе – 1996. - №2. – С. 54-57.
7. Евсеева, А.И. Уравнения с параметрами / А.И. Евсеева // Математика в школе – 2003. - №7. – С. 10-17.
8. Епифанова, Т.Н. Графические методы решения задач с параметрами / Т.Н. Епифанова// Математика в школе – 2003. - №7. – С. 17-20.
9. Кожухов, С.К. Об одном классе параметрических задач / С.К. Кожухов // Математика в школе – 1996. - №3. – С. 45-49.
10. Кожухов, С.К. Различные способы решения задач с параметром / С.К. Кожухов // Математика в школе – 1998. - №6. – С. 9-12.
11. Кормихин, А.А. Об уравнениях с параметром / А.А. Кормихин // Математика в школе – 1994. - №1. – С. 33-35.
12. Кочерова, К.С. Об уравнениях с параметром и модулем (графический способ решения) / К.С. Кочерова// Математика в школе – 1995. - №2. – С. 2-4.
13. Мещерякова, Г.П. Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям / Г.П. Мещерякова // Математика в школе – 2001. - №5. – С. 60-62.
14. Мещерякова, Г.П. Функционально-графический метод решения задач с параметром / Г.П. Мещерякова // Математика в школе – 1999. - №6. – С. 69-71.
15. Постникова, С.Я. Уравнения с параметрами на факультативных занятиях / С.Я. Постникова// Математика в школе – 2002. -№ 8. – С. 45-46.
16. Потапов, М.К., Шевкин А.В. О решении уравнений вида  / М.К. Потапов// Математика в школе – 2003. -№8. – С. 12-14.
17. Ратников. Н.П. От уравнения с параметром – к графику, задающему параметр / Н.П. Ратников // Математика в школе – 1990. - №3. – С. 80.
18. Заслонкина Л. С. Задачи с параметрами // Библиотека к журналу математика в школах Украины – Х.: Основа, 2012.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

## Алгоритм решения линейных уравнений с параметрами:

1. Найти область допустимых значений параметра.

2. Привести уравнение к стандартному виду.

3. Найти контрольные значения параметра.

4. Решить частные уравнения для контрольных значений параметра .

5. Для остальных значений параметра найти общие решения по формуле

6. Записать ответ.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма могут быть опущены.

## Приложение 2

## Алгоритм решения квадратных уравнений с параметрами:

1. Найти область допустимых значений параметра.
2. Привести уравнение к стандартному виду.
3. Найти контрольные значения параметра из уравнения .
4. На множестве без найденных контрольных значений параметра составить квадратное уравнение и найти его дискриминант*D*.
5. Найти контрольные значения параметра из уравнения *D = 0*.
6. Решить частные уравнения для контрольных значений параметра.
7. На выделенных промежутках значений параметра оценить знак *D*.
8. Решить частные уравнения, не имеющие решений и имеющие два различных действительных корня.
9. Записать ответ.

## Приложение 3

## Соотношения корней квадратного уравнения[19]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Свойство корней квадратного уравнения | Математическая модель свойств корней |
|  | Корни существуют |  |
|  | Корни не существуют |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## Приложение 4

## Алгоритм решения уравнений с параметрами графическим методом:

1. Построить график данной функции.
2. Рассечь его прямыми
3. Найти точки пересечения.
4. Выписать ответ.