

Легкие приемы запоминания не легкой тригонометрии

(статья адресована обучающимся 9 – 11 классов и молодым учителям математики, преподающим в старших классах)

Математика – это один из самых сложных школьных предметов. Математика – наука абстрактная, именно поэтому многие учащиеся испытывают большие трудности при ее изучении.

Особенно тяжело приходится выпускникам 11-х классов, которые для сдачи экзамена по выбору взяли математику профильного уровня. Если при сдаче базового уровня математики разрешается использовать справочные материалы, то на экзамене по математике уровня профильного выпускники остаются один на один со своей памятью. А она у всех разная, как, впрочем, и способности к математике.

Поэтому, задача учителя изыскать все способы, приемы запоминания формул учениками.

Остановимся на мнемонических правилах.

Мнемони́ка (др.-греч. *μνημονικόν* — искусство запоминания), **мнемотехника** — совокупность специальных приёмов и способов, облегчающих запоминание нужной информации и увеличивающих объём памяти путём образования ассоциаций (связей): замена абстрактных объектов и фактов на понятия и представления, имеющие визуальное, аудиальное или кинестетическое представление, связывание объектов с уже имеющейся информацией в памяти различных типов модификации для упрощения запоминания (*Википедия*).

Все мнемонические правила основаны на внесении ясности в, кажущийся бессмысленным, материал, т.е. хаос преобразуется в порядок посредством некоторой систематизации.

Вернемся к нашим старшеклассникам и поможем им легко запомнить некоторые **тригонометрические формулы**.

1. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса основных углов.

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а также формулы

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

запоминаются учениками довольно легко.

Трудности начинаются, когда перед обучающимися ставится задача запомнить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса основных углов:

α	30 °	45 °	60 °
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Чтобы избавиться от этой проблемы можно (учитывая, что значения углов идут в порядке возрастания) записать цифры 1, 2, 3 сначала в прямом порядке, потом в обратном порядке в столбик:

1 2 3

3 2 1,

разделить все записанные числа на 2:

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$

и извлечь квадратный корень из числителей

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

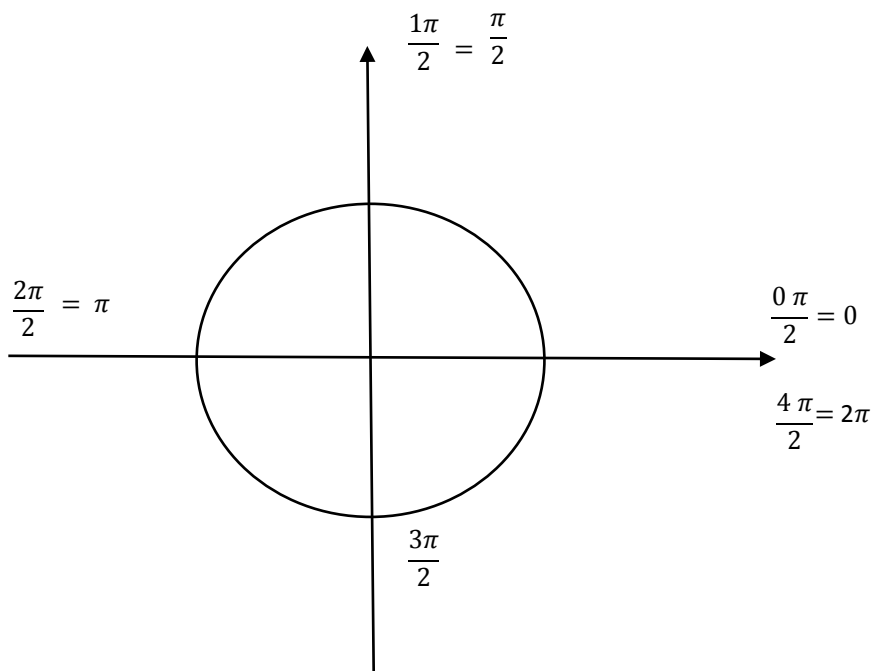
Значения тангенса углов можно не запоминать, т.к. их вычисляем по известной формуле:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

А значения котангенса записываются в обратном порядке.

2. Расположение углов на единичной окружности.

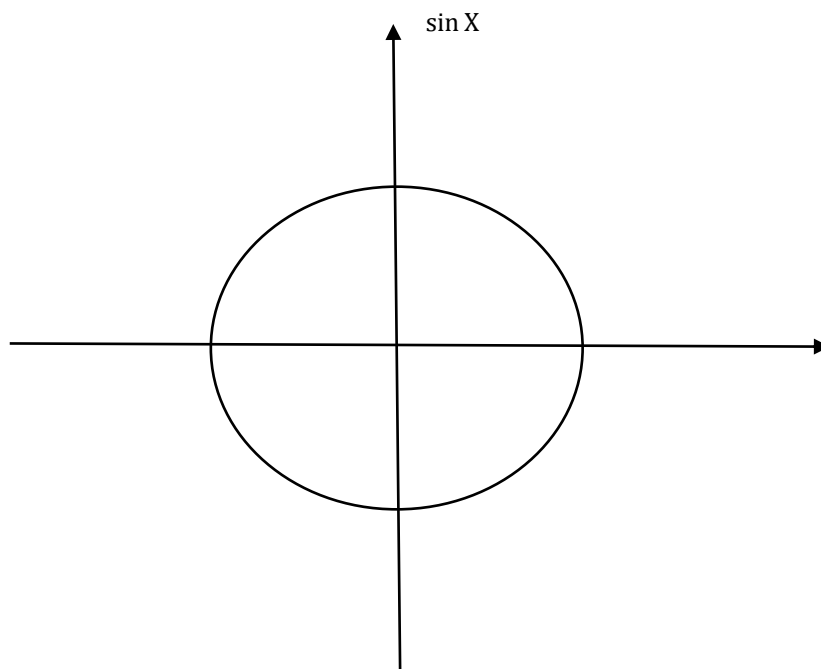
Расположение углов на единичной окружности запомнится легко, если записать их так:



3. Запоминаем оси координат для синуса и косинуса.

При запоминании, какая из осей координат является осью синуса, а какая косинуса, можно воспользоваться следующим приемом:

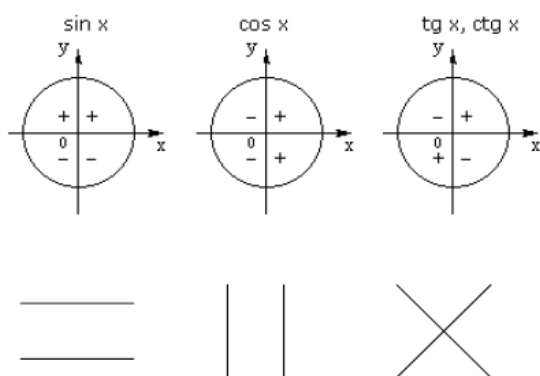
При произношении слова «синус» акцентируем внимание на первой букве слова – СССинус. СССинус – СССверху



Подписываем ось ординат - $\sin X$ (соответственно ось абсцисс - $\cos X$)

4. Знаки тригонометрических функций.

4.1 Все тригонометрические функции в 1 четверти принимают положительные значения (знак «+»).



Учащиеся легко запоминают, что у тангенса и котангенса знаки располагаются крест-накрест.

Для синуса и косинуса – следующее правило:

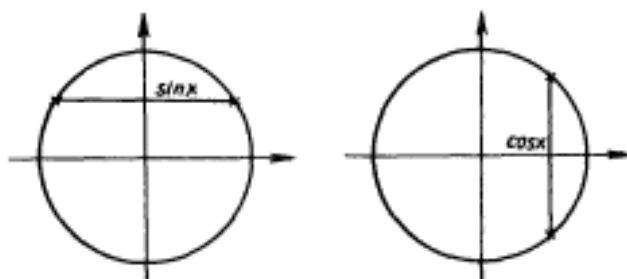
при произнесении слова «синус» ударная гласная «и» вытягивает рот в направлении « \leftrightarrow », значит, у синуса знаки расположены горизонтально. Аналогично, при произнесении слова

«косинус», ударная гласная «о» вытягивает рот в направлении « \updownarrow », значит, у косинуса знаки расположены вертикально.

4.2 При решении простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a, \cos x = a$$

ученики забывают, какую хорду и в каком случае нужно рассматривать. Опять поможет произнесение слов «синус» и «косинус». Ударная гласная «и» вытягивает рот в направлении « \leftrightarrow », значит на круге при решении уравнения $\sin x = a$ надо провести горизонтальную хорду, ударная «о» вытягивает рот в направлении « \updownarrow », значит при решении уравнений вида $\cos x = a$ будем проводить вертикальную хорду.



5. Формулы приведения.

5.1 Чтобы запомнить формулы приведения необходимо знать следующее:

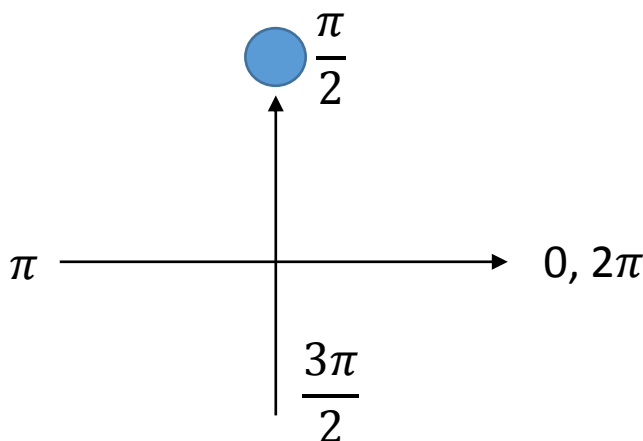
- 1). Какие формулы являются формулами приведения;
- 2). Когда нужно менять синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот (функцию на кофункцию);

3). Какой знак поставить в итоге.

Помогает «правило слона».

Мы сами (наше тело) себе становимся подсказкой, если вытянем руки в стороны.

Наше туловище и руки, в таком положении, можно принять за оси координат:



Таким образом можно ответить на 1 вопрос: «Какие формулы являются формулами приведения».

Это формулы, аргумент тригонометрической функции в которых имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$$

А, когда «слон» начинает кивать головой, то появляется ответ на 2 вопрос: «Когда нужно менять функцию на кофункцию».

Если он кивает головой сверху вниз $\uparrow \frac{\pi}{2}$ (что означает «да»), то в

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,$$

формуле (при значениях аргумента $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,$) функция

меняется на кофункцию, если же слева направо $\pi \longleftrightarrow 2\pi$ (что

означает «нет»), то (при значениях аргумента $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$) функцию на кофункцию не меняем.

Остается в правой части формулы поставить правильный знак приведенной функции (о знаках говорилось выше).

5.2 Еще одно шуточное правило для запоминания формул приведения:

Если ГО, то О,
Если ВЕ, то МЕ.

Если ось ГОризонтальная, то функция Остаётся неизменной, например:
 $\sin(\pi+x) = -\sin(x)$.

Если ось ВЕртикальная, то функция МЕняется на кофункцию, например: $\operatorname{tg}(3\pi/2-x) = \operatorname{ctg}(x)$.

(Не забываем определять знак приведенной функции)

6. Формулы сложения.

6.1 Для запоминания формул сложения вновь делаем акцент на первую букву в слове «синус». СССинус – СССвой («свой парень», правильный). Дружит с косинусом и знака не меняет.

У косинуса все наоборот: не дружит с синусом и знак меняет.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

6.2 Можно воспользоваться другим приемом запоминания этих формул:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

Произносим: синус(a+/-b) равен: синус(1 аргумента)косинус(2 аргумента) тот же знак, поменять синус и косинус местами'

Формулы

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

запоминаются абсолютно аналогично: косинус(a+/-b) равен: косинус косинус(аргументов) противоположный знак, синус синус(аргументов).

6.3 И еще, для запоминания этих длинных тригонометрических формул, можно делать акцент на то, что там, где косинус слева, справа находится произведение одинаковых функций. Там, где слева синус, справа произведения разных функций.

7. Формулы синуса и косинуса двойных углов.

Легко запомнив формулы синуса и косинуса суммы, можно перейти к быстрому выводу формул двойных углов.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

Поставляя в эти формулы $\alpha + \beta$, получаем формулы синуса и косинуса двойных углов:

$$\text{Синус двойного угла: } \sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a$$

$$\text{Косинус двойного угла: } \cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Вспоминая основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

легко выводим еще 2 формулы для **косинуса двойного угла**:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

8. Связь тангенса и косинуса.

Основное тригонометрическое тождество позволяет установить связь тангенса и косинуса.

Возьмём основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ и разделим его на $\cos^2 a$. Получим:

8.1 Связь тангенса и косинуса:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

8.2 Аналогично получаем связь котангенса и синуса:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

8.3 Формула **тангенса суммы** – ещё одна, тяжело поддающаяся запоминанию. Выведем её так:

Формула **тангенса суммы**:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на произведение косинусов, получим:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

8.4 Сразу выводится и формула **тангенса двойного угла**:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

8.5 Из формулы косинуса двойного угла можно получить формулы **синуса и косинуса для половинного**. Для этого к левой части формулы косинуса двойного угла: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ прибавляем единицу, а к правой – тригонометрическую единицу, т.е. сумму квадратов синуса и косинуса.

$$\begin{aligned} \cos 2a + 1 &= \cos^2 a - \sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a &= \cos 2a + 1 \end{aligned}$$

Выражая $\cos a$ через $\cos 2a$ и выполняя замену переменных, получаем:

косинус половинного угла: $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$

Знак берётся в зависимости от квадранта.

Аналогично, отняв от левой части равенства единицу, а от правой – сумму квадратов синуса и косинуса, получим:

$$\begin{aligned} \cos 2a - 1 &= \cos^2 a - \sin^2 a - \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \sin^2 a &= 1 - \cos 2a \end{aligned}$$

синус половинного угла: $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$

8.6 И, наконец, чтобы преобразовать сумму тригонометрических функций в произведение, используем следующий приём. Допустим, нам нужно представить в виде произведения сумму синусов $\sin a + \sin b$. Введём переменные x и y такие, что $a = x + y$, $b = x - y$.

Тогда

$$\sin a + \sin b = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y.$$

Выразим теперь x и y через a и b .

Поскольку $a = x + y$, $b = x - y$, то $x = \frac{a + b}{2}$, $y = \frac{a - b}{2}$. Поэтому

Представление **суммы синусов** в виде **произведения**:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

9. Формулы понижения степени.

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

Важно понять структуру этих формул, в частности, такой момент – «степень *понижается*, а угол *становится в два раза больше*». Эти формулы очень похожи друг на друга, поэтому для лучшего их запоминания следует применять правило: «Единица минус – получаем синус, единица плюс – вот он - косинус».

В заключении хочется сказать, что использование простого «нематематического» запоминания сложных математических формул (или их быстрое выведение с помощью уже известных) на уроках математики (на всех ступенях обучения) позволяет решить сразу несколько задач:

во-первых, математика перестает быть для обучающихся предметом абстрактным и непонятным;

во-вторых, повышается интерес к математике;

в – третьих, применение мнемотехники на уроках математики повышает качество знаний обучающихся.

Литература

1. Энциклопедия Википедия.
2. А.Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 - 11 классов Изд. «Мнемозина», 2012 год
3. А.И.Люберанский. Формулы и мнемонические правила. Журнал «Математика в школе» №6, 1999 год
4. И.Б.Гусева, Г.В.Сычева. Учимся преобразовывать тригонометрические выражения. Журнал «Математика в школе» № 10, 2000 год Зиганов М., Козаренко В. Мнемотехника. М.: Школа рационального чтения, 2000.
5. Как запомнить, чтобы вспомнить!
http://supermemory.gets.ws/content/vasilxevy_-_superpamiatx_42.php
6. Хромов В. Мнемотехника. Искусство запоминания
<http://www.superidea.ru/intel/mem/iszap.htm>