

# Учебно- методический материал:

## **« ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ КОМБИНАТОРИКИ. РАЗМЕЩЕНИЕ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ.».**

Автор: Омарова Зульфия Магомедовна, учитель математики

Республика Дагестан

Махачкала 2022

## **Введение**

### **1. Актуальность темы**

Комбинаторика – один из разделов дискретной математики, который приобрел большое значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

Элементы теории вероятностей, в частности элементы комбинаторики, на современном этапе являются составной частью всего курса математики, начиная с начальной школы. Поэтому знание этого раздела математики необходимо студентам – будущим учителям. От увлеченности учителя элементами комбинаторики, от умения решать комбинаторные задачи зависит заинтересованность учеников этим материалом.

В практической деятельности человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Приходится выбирать из некоторого конечного множества совокупности объектов его подмножества, обладающие тем или иным свойством, подсчитывать, сколько различных комбинаций можно составить из конечного числа элементов, принадлежащих данной совокупности, располагать эти элементы в определенном порядке.

Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному — разместить посевы сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью школы — составить расписание уроков, ученому-химику — рассмотреть возможные связи между атомами и молекулами, лингвисту — учесть различные варианты значений букв незнакомого языка и т. д.

В этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях. Задачи такого типа называются *комбинаторными*, а область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*.

## **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ КОМБИНАТОРИКИ. РАЗМЕЩЕНИЕ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ.**

### **§1.1 Понятия и общие правила комбинаторики.**

Комбинаторный анализ, комбинаторная математика, комбинаторика, - раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью к.а. является изучение комбинаторных конфигураций, в частности, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания.

Комбинаторика - один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

В Большой Советской Энциклопедии говорится, что комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются некоторые операции над конечными множествами.

Основными и типичными операциями и связанными с ними задачами комбинаторики являются следующие:

1. образование упорядоченных множеств, состоящее в установлении определенного порядка следования элементов множества друг за другом, составление перестановок;
2. образование подмножеств, состоящее в выделении из данного множества некоторой части его элементов, - составление сочетаний;
3. образование упорядоченных подмножеств - составление размещений.

Рождение комбинаторики как раздела [математики](#) связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучают, сколько комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из данных объектов. Прежде чем переходить к общим принципам, рассмотрим несколько примеров.

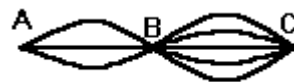
### 1) Сколько существует трёхзначных чисел?

**Решение.** Самое большое трёхзначное число — это 999. Самое большое двузначное — 99. Поэтому существует  $999 - 99 = 900$  трёхзначных чисел.

Тот же ответ можно получить и другим способом. Вообразите, что мы пишем, цифра за цифрой, трёхзначное число. Сначала напомним любую из девяти цифр 1, 2, ..., 9 в разряд сотен. Затем любую из десяти цифр — в разряд десятков; наконец, какую-нибудь (любую) цифру — в разряд единиц.

Ответ:  $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ .

2) Сколько способов проехать из  $A$  в  $C$ , если система дорог такова, как показано на рисунке?

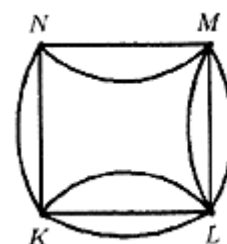


**Решение.** Прежде чем попасть из  $A$  в  $C(?)$ , надо любым из трёх возможных способов попасть из  $A$  в  $B$ , а затем — любым из пяти способов из  $B$  в  $C$ .  
Общее количество способов равно  $3 \cdot 5 = 15$ .

3) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белую и чёрную ладьи, чтобы они не били одна другую?

**Решение.** Сначала поставим на любую из 64 клеток доски белую ладью. Для чёрной ладьи останется 49 полей. Ответ:  $64 \cdot 49 = 3136$ . Заметьте: мы перемножаем числа 64 и 49, а не складываем их. Одна из стандартных ошибок, которую делает начинающие, состоит в том, что они путают, когда надо складывать, а когда умножать. Между тем всё просто: сумма  $m + n$  есть количество элементов объединения двух непересекающихся множеств, одно из которых состоит из  $m$ , а другое — из  $n$  элементов. А произведение  $mn$  — это количество пар вида  $(x; y)$ , где  $x$  может быть любым из  $m$  элементов некоторого множества (например, это может быть множество 64 возможных полей для белой ладьи), а  $y$ , при каждом фиксированном  $x$ , может быть любым из некоторых  $n$  элементов (например,  $y$  — одно из 49 возможных полей для чёрной ладьи).

Иногда необходимо использовать и сумму, и произведение:  
например, количество путей, ведущих на рисунке из точки  $K$  в точку  $M$ , равно  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$ .

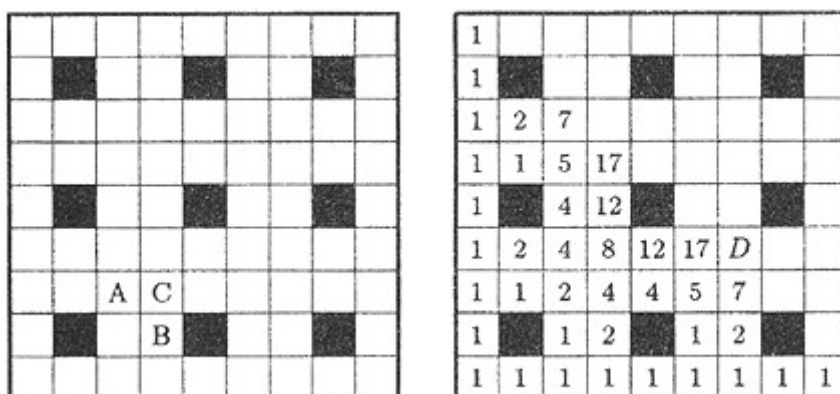


4) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, жёлтый и зелёный шарики?

**Решение.** Вот все 6 способов: к ж з; к з ж; ж к з; ж з к; з к ж; з ж к.

5) Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки изображённого на рисунке квадрата  $9 \times 9$  в правую верхнюю, ни разу не побывав ни на одной закрашенной клетке и двигаясь только вверх или вправо?

**Решение.**



Нет ни сил, ни желания рисовать все варианты: это пример не так прост, как предыдущий! Что же делать? Давайте поставим перед собой более скромную цель: найдём количество путей из левой нижней клетки не в правую верхнюю, а, например, в клетку *A*. Очевидно, таких путей два. Столько же путей ведут в точку *B*. Теперь легко понять, что в клетку *C* можно пройти четырьмя способами (два из них ведут через *A*, а два — через *B*).

Таким образом, клетку за клеткой, мы можем заполнять доску, используя правило суммы: если в некоторую клетку *Z* можно попасть справа из клетки *X* и снизу — и *Y*, то количество способов попасть в клетку *Z* есть сумма количеств способов попасть в *X* и *Y*. Например, в клетку *D* можно попасть  $17 + 7 = 24$  способами.

Так потихонечку и заполним всю доску. Ответ: 678.

6) Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова МАМА?

**Решение.** МАМА, МААМ, ММАА, АМАМ, АММА и ААММ — всего 6 способов.

Мы разобрали уже шесть разных комбинаторных задач. Пора перейти к более общим понятиям.

## **Глава 2. Общие правила комбинаторики.**

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств — **правило суммы** и **правило произведения**.

**Правило суммы:** пусть имеется  $n$  попарно непересекающихся множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , содержащих  $m_1, m_2, \dots, m_n$  элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

Пример. Если на первой полке стоит  $X$  книг, а на второй  $Y$ , то выбрать книгу с первой или второй полки, можно  $X+Y$  способами.

Пример. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

**Решение:** По правилу суммы получаем  $17+13=30$  вариантов.

**Кортеж** - конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества.

**Правило произведения:** пусть имеется  $n$  множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  содержащих  $m_1, m_2, \dots, m_n$  элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, т. е.

построить кортеж  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_i \in A_n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), равно  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ .

Пример. Если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно  $5 \cdot 10 = 50$  способами.

Пример. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно  $12 \cdot 3 = 36$  вариантов переплета.

**Выборки.** Если из множества предметов выбирается некоторое подмножество, то его называют **выборкой**. Выборки бывают **упорядоченные** и **неупорядоченные**.

В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить следующие трехзначные числа 123, 431, 524, ...и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, так как 123 и 132 - разные числа.

Пример. Из 20 учащихся класса выбрать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Два элемента  $a$  и  $b$  могут быть выписаны в строчку всего двумя способами:  $ab$  и  $ba$ . Для трёх элементов, как мы знаем из четвёртого примера, существует 6 вариантов. Нетрудно посчитать и число перестановок множества из 4 элементов:



1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,  
 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,  
 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,  
 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Всего 24 перестановки, расположенные в 4 столбца по 6 перестановок в каждом. Очевидно, перестановки на 5 элементах можно расположить в 5 столбцов, по 24 в каждом. Значит, всего существует  $5 \cdot 24 = 120$  таких перестановок.

Для числа перестановок  $n$  элементов есть обозначение:  $n!$  (читаем: «эн факториал»). Факториал равен произведению всех натуральных чисел от 1 до  $n$ . Например,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Функция  $n!$  возрастает очень быстро. Так,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ , ...,  $10! = 3\,628\,800$ . Факториалы возникают в комбинаторике очень часто. Поэтому принято считать, что если ответ выражен через факториалы, то всё сделано. (Этому в немалой степени способствует открытая в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом формула для приближённого вычисления:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n \cdot e^n$$

Относительная ошибка при пользовании этой формулой очень невелика и стремится к нулю при увеличении числа  $n$ . Что такое  $e$  и почему верна формула Стирлинга, младшекласснику объяснить очень трудно.

Главное свойство факториала очевидно из определения:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!.$$

Подставим в эту формулу  $n = 0$ . Получим:  $1! = 1 \cdot 0!$ , откуда  $0! = 1$ . И действительно, во многих формулах для единообразной записи очень удобно

пользоваться обозначением  $0! = 1$ . А вот определить  $(-1)!$  никак нельзя: равенство  $0! = 0 \cdot (-1)!$  невозможно ни при каком значении  $(-1)!$ .

В начале главы I мы рассмотрели некоторые общие правила решения комбинаторных задач. С их помощью можно решать задачи самых разных типов. Однако, как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике вместо решения задачи по общим правилам часто удобнее пользоваться готовыми формулами. Дело в том, что некоторые типы задач встречаются значительно чаще других. Комбинациям, которые встречаются в этих задачах, присвоены особые названия — размещения, перестановки и сочетания.

## **§1.2. Размещения, сочетания и перестановки без повторений.**

Следующее важное понятие комбинаторики — размещение. Давайте рассмотрим такую ситуацию: в классе, в котором 25 учеников, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, сначала 25 способами можно выбрать любого ученика в старосты. Затем из 24 оставшихся — заместителя старосты, а после этого любой из 23 оставшихся может оказаться помощником заместителя. По правилу произведения, всего имеем  $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23$  вариантов.

Вообще, через  $A_n^k$  (читаем: «а из эн по ка») обозначают число способов выбрать из данных  $n$  элементов сначала первый элемент, потом второй, третий, ...,  $k$ -й. Вычисляют его по формуле

$$A_n^k = n (n - 1) \dots (n - k + 1).$$

Заметьте: в правой части ровно  $k$  множителей, и последний из них равен  $n - k + 1$ , а вовсе не  $n - k$ , как могло показаться на первый взгляд. Формулу можно записать и через факториалы:

$$A_n^k = n!/(n - k)!.$$

Сейчас мы выясним, сколько можно составить таких размещений, если не допускать повторений, т. е. если все элементы, входящие в размещения, различны.

Решенная задача относится к классу комбинаторных задач о размещениях без повторений. Общая формулировка этих задач похожа на формулировку задач о размещениях с повторениями, но имеет особенности. Она такова.

Имеется «бланк», в котором  $k$  мест: 1-е, 2-е, ...,  $k$ -е. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. Имеется запас из  $n$  различных элементов, и на каждое место можно поставить один из этих элементов, но теперь каждый элемент в единственном числе, поэтому элементы не могут повторяться. Сколько существует способов заполнить такой «бланк»? Два способа заполнения считаются различными, если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы.

Каждый способ заполнения позволяет разместить на  $k$  местах некоторые из  $n$  элементов, причем элементы не могут повторяться, поэтому он называется размещением без повторений из  $n$  элементов по  $k$ . Число всех таких размещений обозначают  $A_n^k$ .

Чтобы сосчитать будем рассуждать так. При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  нам надо сделать  $k$  выборов. На первом шагу можно выбрать любой из имеющихся  $n$  элементов. Если этот выбор уже сделан, то на втором шагу приходится выбирать из оставшихся  $n - 1$  элементов. Точно так же на третьем шагу для выбора остается запас лишь из  $n - 2$  элементов, на четвертом — из  $n - 3$  элементов, ..., на  $k$ -м шагу — из  $n - (k - 1) = n -$

$k + 1$  элементов. Применяя правило произведения, получаем, что **число размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$**  выражается следующим образом:

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1) \quad (1)$$

Эту формулу можно записать иначе, умножив числитель и знаменатель на произведение  $(n - k)(n - k - 1) * \dots * 1$ :

$$A_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \dots * 1}{(n-k)(n-k-1) \dots * 1}$$

В числителе получилось произведение всех чисел от 1 до  $n$ . Такие произведения часто встречаются в комбинаторике. Их называют **факториалами** и обозначают  $n!$  (читают: «эн факториал»). Таким образом, формула (1) в этих обозначениях примет вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2)$$

Полагают  $1! = 1$ . Это естественно. Но в дальнейшем нам встретится еще обозначение  $0!$ . Казалось бы, что  $0!$  должен равняться нулю. Принято считать, однако, что  $0! = 1$ . Дело в том, что факториал обладает следующим свойством:  $n! = n(n - 1)!$ . Это равенство справедливо при  $n > 1$ . Естественно определить  $0!$  так, чтобы оно оставалось верным и при  $n = 1$ , т. е. так, чтобы  $1! = 1 * 0!$ . Но тогда приходится положить  $0! = 1$ .

Применим выведенную формулу для решения следующей задачи.

*Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?*

В этом случае надо найти число размещений (без повторений) из 25 элементов по 4. Ведь здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные (выбор: президент — Иванов, вице-президент — Татаринов, ученый секретарь — Тимошенко, казначей — Алексеев отличается от выбора: президент — Тимошенко, вице-президент — Иванов, ученый секретарь — Татаринов и казначей — Алексеев). Поэтому ответ дается формулой

$$A_n^k = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

### ***Сочетания без повторений***

Не всегда нас интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если в отборочной группе первенства мира по футболу 6 команд, а продолжают соревнования лишь две, то порядок, в котором располагается первая пара, не существен — быть бы хоть вторым, лишь бы выйти в следующий круг!

Точно так же если в первенстве страны по футболу участвуют 16 команд, а по итогам первенства высшую лигу покидают команды, занявшие последние два места, то слабым утешением для команды будет предпоследнее, а не последнее место — все равно придется перейти во второй эшелон.

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях.

***Сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$***  называют любой выбор  $k$  элементов из имеющихся различных  $n$  элементов.

Различные сочетания отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов — порядок их перечисления вообще не важен. Число

сочетаний, которые можно составить из  $n$  элементов по  $k$ , обозначают через  $C_n^k$ .

Сочетания — это в точности подмножества из  $k$  элементов заданного множества из  $n$  элементов. Отметим здесь еще, что для числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  применяется также обозначение  $C_k^n$ .

Формула для числа сочетаний легко получается из выведенной ранее формулы для числа размещений. В самом деле, составим сначала все сочетания из  $n$  элементов по  $k$ , записав каждое в виде некоторого размещения (т. е. упорядочив элементы каждого сочетания), а потом будем переставлять входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все размещения из  $n$  элементов по  $k$ , причем каждое только по одному разу. Но таких перестановок для каждого сочетания можно сделать  $k!$ , а число этих сочетаний равно  $C_n^k$ . Значит, справедлива формула  $k! C_n^k = A_n^k$ .

Из этой формулы находим, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Замечательно, что выведенная формула совпадает с формулой для числа перестановок из  $k$  элементов одного типа и  $n - k$  элементов второго типа:

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad \text{Иными}$$

словами,

$$C_n^k = P(k, n-k) \quad (7)$$

Это равенство можно доказать и непосредственно, не прибегая к формуле числа размещений. Для этого поставим по порядку все  $n$

элементов, из которых составляют сочетания, и зашифруем каждое сочетание расстановкой нулей и единиц. Именно, если некоторый элемент входит в сочетание, то на его месте пишем 1, а если он не входит, то пишем 0.

Например, если составляются сочетания из букв а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, то сочетанию {а, в, е, з, и} соответствует расстановка 1010010110:

1 0 1 0 0 1 0 1 1 0

а б в г д е ж з и к

а расстановке 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 — сочетание {б, в, г, ж, к}:

0 1 1 1 0 0 1 0 0 1

а б в г д е ж з и к

Ясно, что при этом каждому сочетанию соответствует расстановка из  $k$  единиц и  $n - k$  нулей, а каждой расстановке из  $k$  единиц и  $n - k$  нулей, соответствует некоторое сочетание из  $n$  элементов по  $k$ , причем различным расстановкам — различные сочетания. Отсюда и следует, что число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  совпадает с числом перестановок из  $k$  элементов одного типа (единиц) и  $n - k$  элементов другого типа (нулей).

Можно провести и другое рассуждение. Возьмем некоторое сочетание из  $n$  элементов по  $k$ , причем запишем его в виде расстановки всех  $n$  элементов: сначала в некотором порядке выпишем  $k$  элементов, вошедших в сочетание, а затем в некотором порядке  $n - k$  элементов, не вошедших в сочетание. Теперь будем считать первые  $k$  элементов «одинаковыми» в том смысле, что они вошли в сочетание, и следующие  $n - k$  — тоже «одинаковыми», но другого типа — они не вошли в сочетание. Теперь будем производить перестановки с повторениями из  $k$  элементов первого типа (вошедшие в сочетание) и  $n - k$  элементов второго типа (не вошедшие в сочетание), и первые  $k$  элементов этих перестановок будем считать новыми сочетаниями.

Легко видеть, что при этом мы получим все сочетания из  $n$  элементов по  $k$  и никакое не получим дважды. Перестановки лишь внутри первых  $k$  лишь внутри последних  $n - k$  элементов невозможны — элементы в этих группах «одинаковы», поэтому разные перестановки отличаются либо числом «новых» элементов, вошедших в сочетание, либо местами расположения этих новых элементов, но тогда они вытесняют из прежнего сочетания разные элементы — ведь элементы исходного сочетания, стоящие на разных местах, все же различны. Отсюда снова следует, что число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  совпадает с числом перестановок из  $k$  элементов одного типа (вошедших в исходное сочетание) и  $n - k$  элементов другого типа (не вошедших в него).

Применяя формулу (6), легко решить задачи, о которых говорилось в начале этого пункта.

Число различных исходов игр в отборочной группе первенства мира по футболу дается формулой  $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!}$ .

Число различных «печальных» исходов футбольного первенства равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14!2!} = 120$$

Вот еще задача на сочетания.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей? В отличие от задачи, рассмотренной в з. 1, здесь не налагается условие, что ладьи не могут бить друг друга. Поэтому нам надо просто выбрать из 64 клеток шахматной доски любые 8 клеток. А это может быть сделано

$$C_{64}^8 = \frac{64!}{8!56!} = 4\,426\,165\,368 \text{ способами.}$$

Точно так же доказывается, что на доске из  $m$  горизонталей

$$\text{и } n \text{ вертикален } k \text{ ладей можно поставить } C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k!(mn-k)!}$$



способами.

Если же ставить не  $k$  одинаковых ладей, а  $k$  различных фигур, то уже имеет значение, какая фигура куда поставлена. Поэтому здесь получатся не сочетания, а размещения, и ответ дается формулой  $A_{mn}^k = \frac{(mn)!}{(mn-k)!}$ .

Представьте себе, что в классе из 25 человек нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут судить, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе. Тогда способов будет не  $A_{25}^3$ , а в 6 раз меньше. (Подумайте об этом хорошенько!) Здесь  $6 = 3!$  — количество способов ранжировать трёх начальников, то есть количество всех перестановок на множестве из 3 элементов.)

Вообще, очень важные для комбинаторики и теории вероятностей числа сочетаний  $C_n^k$  (читаем: «число сочетаний из  $n$  по  $k$ » или « $k$  из  $n$  по  $k$ ») можно вычислить по формуле  $C_n^k = A_n^k / k! = n! / (k!(n-k)!)$ .

К сожалению, ни для точного определения, ни для свойств чисел сочетаний здесь места не нашлось. Но для первого знакомства с комбинаторикой сказанного и так предостаточно. Вернёмся лучше к нашим обычным задачам, оставив теорию на будущее.

### ***Перестановки без повторений***

При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  при  $k < n$  мы получали размещения, которые могли отличаться и составом элементов, и порядком их расположения. Но если брать размещения, в которые входят все  $n$  элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие размещения из  $n$  элементов по  $n$  называют ***перестановками из  $n$  элементов***.

Можно также сказать, что перестановками из  $n$  элементов называют всевозможные кортежи, каждый из которых содержит все эти элементы по одному разу и которые отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают через  $P_n$ . Формула для  $P_n$  сразу получается из формулы для числа размещений без повторений.

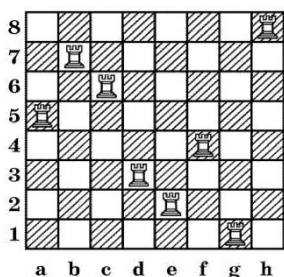
Именно,

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n! \quad (3)$$

Заметим, что здесь уже работает принятое выше соглашение, что  $0! = 1$ .

### Решим такую задачу 1.

*Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?*



**Рис13**

В одних комбинаторных задачах трудно найти хотя бы одно решение, а в других решений много, но трудность состоит в их пересчете. Ладья бьет по горизонтали и вертикали. Поэтому при таком расположении 8 ладей на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье. Одно такое расположе-

ние найти совсем легко — достаточно выстроить ладьи по диагонали и они не будут бить друг друга. Сколькими же способами можно расположить ладьи требуемым образом?

Возьмем одно из этих расположений и обозначим через  $a_1$  номер занятого поля на вертикали  $a$ , через  $a_2$  — на вертикали  $b$ , ..., через  $a_8$  — на вертикали  $h$ . Среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_8$  нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же горизонталь, поэтому  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  будет некоторой перестановкой из чисел  $1, 2, \dots, 8$ . Обратно, если  $a_1, a_2, \dots, a_8$  — некоторая перестановка чисел  $1, 2, \dots, 8$ , то ей соответствует

некоторое расположение ладей, при котором они не могут бить друг друга. Например, на рис. 13 изображено расположение ладей, соответствующих перестановке (5, 7, 6, 3, 2, 4, 1, 8). Таким образом, число искомых расположений ладей равно числу перестановок чисел 1, 2, ..., 8, т. е.  $P_8$ . Но

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Значит, ладьи можно расположить требуемым образом 40 320 способами.

Точно так же доказывается, что *на доске из  $n$  горизонталей и  $n$  вертикалей можно  $n!$  способами расположить ладьи так, чтобы они не могли бить друг друга.*

Совсем иной ответ получился бы, если бы ладьи чем-то отличались друг от друга — имели разный цвет или были перенумерованы. В этом случае из каждого расположения не занумерованных ладей получится  $n!$  расположений занумерованных ладей — они получаются, если при тех же занятых полях всеми способами переставлять друг с другом  $n$  ладей. Поэтому получилось бы  $(n!)^2$  способов расположения, при которых ладьи не могут бить друг друга.

К последнему выводу можно прийти иначе, прямо используя правило произведения. Первую ладью можно поставить на любое из  $n^2$  полей. После этого придется вычеркнуть горизонталь и вертикаль, на которые попала эта ладья, останется «доска» (хотя, возможно, с разрывами) с  $n - 1$  горизонталями и  $n - 1$  вертикалями, имеющая  $(n - 1)^2$  полей. Значит, вторая ладья может быть поставлена  $(n - 1)^2$  способами. Точно так же третья ладья может быть поставлена  $(n - 2)^2$  способами и т. д. Всего получаем  $n^2(n - 1)^2 \dots 1^2 = (n!)^2$  способов расположения ладей.

Поскольку доска  $1 \times 1$  состоит из одного поля, поставить на нее одну ладью можно единственным образом. Это оправдывает равенство  $1! = 1$ . Интересно еще рассмотреть доску  $0 \times 0$  — на ней совсем нет полей, или, как

говорят математики, она имеет пустое множество полей. «Поставить» на нее 0 ладей можно лишь одним способом — ничего никуда не ставить. В комбинаторике часто удобно считать и такие способы — иначе пришлось бы делать много лишних оговорок. Значит, надо положить  $0! = 1$ .

### § 1.3 *Перестановки, сочетания и размещения с повторениями.*

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок — некоторые перестановки совпадают друг с другом.

Например, переставляя буквы слова «март», мы получим 24 различные перестановки:

Март	матр	Мрат	грам	тарм	амрт
Рамт	мтар	Рмат	тмар	атрм	армт
Мтра	ратм	Рмта	амтр	атмр	трма
Ртма	ртам	Мрта	артм	тамр	тмра

А если вместо слова «март» взять слово «мама», то во всех выписанных перестановках надо будет заменить «р» на «м» и «т» на «а». При этом некоторые из наших 24 перестановок окажутся одинаковыми. Например, стоящие в первом столбце перестановки март, рамт, мтра, ртма при этой замене дадут одно и то же слово «мама» — при перестановках лишь будут меняться местами одинаковые буквы («м» или «а»). Точно так же все четыре перестановки, написанные во втором столбце, дадут слово «маам». Вообще, все 24 перестановки разбиваются на четверки, которые при замене «р» на «м» и «т» на «а» дают один и тот же результат. В таблице эти перестановки стоят в одном столбце. Поэтому число различных перестановок, которые

можно сделать из слова «мама», равно  $24:4 = 6$ . Вот они: мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма.

Общая задача формулируется следующим образом.

*Имеется  $n$  элементов  $k$  различных типов:  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Сколько можно составить различных перестановок из этих элементов?*

Перестановки такого типа называются **перестановками с повторениями**, их число обозначают  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Сколько же их?

Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы  $n!$ . Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В самом деле, возьмем, например, перестановку

$$\underbrace{aa\dots a}_{n_1} \underbrace{bb\dots b}_{n_2} \dots \underbrace{xx\dots x}_{n_k}$$

в которой сначала выписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы  $k$ -го типа. В первой группе элементы (первого типа) можно переставлять друг с другом  $n_1!$  способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют  $n_2!$  перестановок элементов во второй группе, ...,  $n_k!$  перестановок элементов в  $k$ -й группе. Например, в перестановке «ммаа» ничего не изменится, если мы поменяем местами первый и второй элементы или третий и четвертый.

Перестановки элементов в разных группах можно делать независимо друг от друга. Поэтому (по правилу произведения) элементы перестановки (4) можно переставлять друг с другом  $n_1! n_2! \dots n_k!$  способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения

элементов. Поэтому множество всех  $n!$  перестановок распадается на части, состоящие из  $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$  одинаковых перестановок каждая.

Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (5)$$

где, напомним,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Пользуясь формулой (5), легко найти, например, сколько перестановок можно сделать из букв слова «математика».

Здесь у нас две буквы «м», три буквы «а», две буквы «т», по одной буквы «е», «и», «к», а всего 10 букв. Значит, по формуле (5) число перестановок равно

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200.$$

Перестановки с повторениями естественно возникают в анаграммах — текстах с переставленными буквами. Например, слова «москва» и «смоква» — анаграммы. Когда-то анаграммы применялись учеными в качестве своеобразного «анонса», они в краткой фразе формулировали суть открытия, а потом переставляли в ней буквы и посылали письмо с переставленными буквами своим коллегам. Когда же печаталась книга с подробным изложением результата, в ней давалась расшифровка анаграммы.

Когда Христиан Гюйгенс открыл кольцо Сатурна, он составил анаграмму «aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, tttt, uuuuu». Буквы в ней можно поставить в таком порядке, что получится текст «Annulocingi- turtenui, piano, nusquamcohaerente, adeclipticaminclinato» («окружен кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклонным к эклиптике»). Однако когда тот же Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и послал своим коллегам по этому

поводу анаграмму, Уоллис, большой мастер в расшифровке тайнописи, разгадал эту анаграмму.

Подсчитаем, сколько можно было сделать «бездумных» перестановок, прежде чем дойти до правильного порядка букв в первой анаграмме Гюйгенса.

В эту анаграмму входят буквы: *a* (7 раз), *c* (5), *d* (1), *e* (5), *g* (1), *h* (1), *i* (7), *l* (3), *m* (2), *n* (9), *o* (4), *p* (2), *q* (1), *r* (2), *s* (1), *t* (5), *u* (5), а всего 61 буква. Значит, по формуле (5)

получаем  $\frac{61!}{7!5!1!5!1!1!7!3!2!9!4!2!1!2!1!5!5!}$  перестановок. Это громадное число порядка  $10^{60}$ . С задачей перебора всех этих перестановок электронная вычислительная машина, делающая миллион операций в секунду, не справилась бы за все время существования Солнечной системы.

В каком-то смысле человеку легче решить эту задачу, чем машине. Ведь человек будет брать не все перестановки, а только те, в которых получаются осмысленные слова, будет учитывать морфологические правила и т. д. Это сильно сократит число необходимых попыток. А самое главное — он примерно знает, над какими вопросами думал его корреспондент. Но все равно получается очень громоздкая работа.

### ***Сочетания с повторениями***

Мы уже говорили, что разобранный пример относится к типу задач на сочетания с повторениями. Общая формулировка этих задач такова.

*Имеются предметы  $n$  различных типов. Сколькими способами можно сделать из них комбинацию из  $k$  элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, при этом предметы одного типа могут повторяться?*

Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа.

Такие комбинации называют *сочетаниями с повторениями* из  $n$  элементов по  $k$ , а их число обозначают  ${}^nC_n^k$ . Эта задача в общем виде решается точно так же, как и задача о пирожных. Именно, прежде всего надо занумеровать возможные типы элементов числами от 1 до  $n$  (иначе можно оказаться в положении мужа, который никак не мог вспомнить, что ему поручила купить жена: 6 пакетов молока и 2 банки пива или 2 пакета молока и 6 банок пива). Теперь можно зашифровать каждую комбинацию с помощью последовательности единиц и палочек: для каждого типа с 1-го до  $n$ -го по порядку написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга палочками. При этом если предметы какого-нибудь типа совсем не вошли в комбинацию, то в записи появятся подряд две или большее число палочек. В результате мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, т. е.  $k$ , а число палочек будет на 1 меньше, чем число типов предметов, т. е.  $n - 1$ . Таким образом, мы получим перестановки с повторениями из  $k$  единиц и  $n - 1$  палочек. Различным комбинациям при этом соответствуют различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация.

так, число  ${}^nC_n^k$  сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов по  $k$  равно числу  $P(k, n - 1)$  перестановок с повторениями из  $n - 1$  палочек и  $k$

единиц. А  $P(k, n - 1) = \frac{(k + n - 1)!}{k!(n - 1)!}$

Поэтому

$${}^nC_n^k = \frac{(k + n - 1)!}{k!(n - 1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Эту же формулу можно доказать и иными способами — сразу приводящими к формуле  ${}^nC_n^k = C_{n+k-1}^k$ . Чтобы задать сочетание с повторениями из элементов  $n$  типов (типы занумерованы) по  $k$ , надо выписать в ряд  $n + k - 1$  единицу, а затем выбрать из этих  $n + k - 1$  позиций  $n - 1$  и на выбранных позициях



поменять  $n-1$  на  $1$ . Этот выбор можно сделать  $C_{n+k-1}^k$  способами. Полученная запись преобразуется в количество элементов каждого типа (число единиц, стоящих между соседними палочками).

А можно выписать в ряд числа от  $1$  до  $n + k - 1$ , выбрать  $k$  из них ( $C_{n+k-1}^k$  способами), а затем первое (наименьшее) выбранное число взять как есть, от второго отнять  $1$ , от третьего отнять  $2$ , ..., от  $k$ -го отнять  $k - 1$ . Сразу получится набор типов выбранных элементов (расположенных по возрастанию).

Фактически мы сейчас определили количество кортежей из  $n$  элементов вида  $(k_1, \dots, k_n)$ , где  $k_1, \dots, k_n$  — неотрицательные целые числа, сумма которых равна  $k$ , т. е. *число способов представить число  $k$  в виде суммы  $n$  неотрицательных слагаемых*. Оно равно  $C_n^k = C_{n+k-1}^k$ .

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями налагается дополнительное условие — в них обязательно должны входить элементы  $r$  фиксированных типов, где  $r < n$ . Эти задачи легко сводятся к уже решенной. Чтобы обеспечить присутствие элементов заданных типов, возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в сочетании с повторениями из элементов  $n$  типов покажутся заняты  $r$  мест. Остальные же  $k - r$  мест можно заполнять любыми элементами, принадлежащими по условию к  $n$  типам. Поэтому комбинаций искомого вида столько же, сколько и сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов, содержащих по  $k - r$  элементов каждое, т. е.  $C_{n-1}^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}$ . В частности, если  $k > n$  и требуется, чтобы в сочетании с повторениями из элементов  $n$  типов по крайней мере один элемент каждого из  $n$  типов, то получится  $C_{k-1}^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}$  комбинаций.

### Размещения с повторениями

Допустим имеется множество  $m$ , состоящее из трех букв  $\{A, B, C\}$ . Составим различные комбинации размещения с повторениями из двух букв

$n$ , отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком элементов, имеем: **AB, BC, CA, AC, BA, CB, AA, BB, CC.**

Обозначение:

**Формула для определения размещения с повторениями:**

$$A_n^m = n^m$$

### **Пример**

Сколько различных слов можно записать в двоичном коде 0 и 1 в восьмиразрядную память?

### **Решение**

Двоичный код 0 и 1 содержит два элемента –  **$n$** , необходимо записать в восьмиразрядную память –  **$m$** .

Воспользуемся формулой размещения с повторениями, получаем

$$A_n^m = 2^8 = 256$$

### **Пример**

Сколько пятизначных чисел можно составить из множества цифр {5,7,2}?

### *Решение*

Из данного набора цифр можно составить пятизначные числа 55555, 75222 и так далее. Цифры каждого такого числа образуют (3,5)-выборку: (5,5,5,5,5), (7,5,2,2,2). Зададимся вопросом: что это за выборки? Во-первых, цифры в числах могут повторяться, поэтому мы имеем дело с выборками с повторениями. Во-вторых, порядок расположения цифр в числе важен. Например, 27755 и 77255 – разные числа. Следовательно, мы имеем дело с упорядоченными (3,5)-выборками с повторениями. Общее количество таких выборок (т.е. общее количество искомых пятизначных чисел) найдём с помощью формулы (2):

$$A_3^5 = 3^5 = 243$$

Следовательно, из заданных цифр можно составить 243 пятизначных числа.

*Ответ:* 243.

### Литература

1. Болотов В. А. О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы //Математика. – 2004. - №44. – с.45-47.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328с.
3. Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистике. 1979г.
- 4.Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Комбинаторика. М., 2006.
5. В.Е. Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2017.
6. Гнеденко Б. В., Журбенко И. Г. Теория вероятностей и комбинаторика //Математика в школе. – 2007. - №6. – с. 67-70.
7. Дихтярь М., Эргле Е. Исторические комбинаторные задачи и комбинаторные модели //Математика. – 2015. - №14. – с. 23-24.
8. Колемаев В. А., Калинина В. Н., Соловьев В. И., Малыхин В. И., Курочкин А. П. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов / Под ред. В. А. Колемаева. М.: ГУУ, 2007. — 87 с.
9. Д.Ж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.